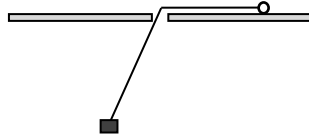


第二章 拉格朗日力学

2025 年 10 月 9 日星期四

10. 在重力的作用下，质点在旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上运动，其中 z -轴方向是垂直向上。写出拉氏函数和拉氏方程。

11. 质量 m 的小球，在光滑的水平桌面上作两维运动。桌面中心有一光滑小孔 O 。将一个质量为 M 的铁块放在小孔的下方，并用绳子将小球与之拴在一起，绳长为 l 。

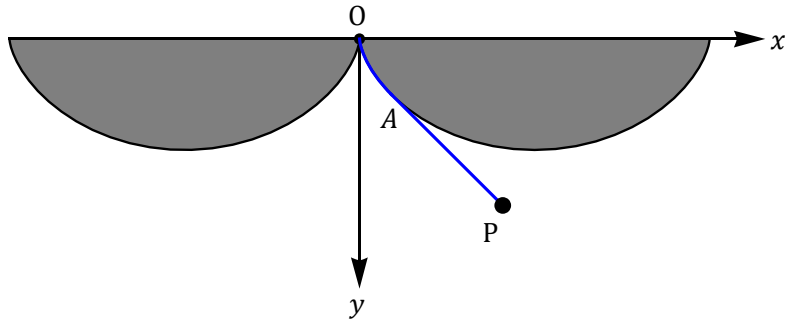


设铁块在一垂直平面内运动，且绳子始终处于绷直状态。写出系统的拉氏函数和运动方程。

12. (惠更斯等时摆) 如图，已知摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

按此外形做成挡板。一根长 $4a$ 的无弹性轻绳，一端系在坐标原点 O ，另一端拴着质量为 m 的小球。在 A 点，绳子与曲面相切。



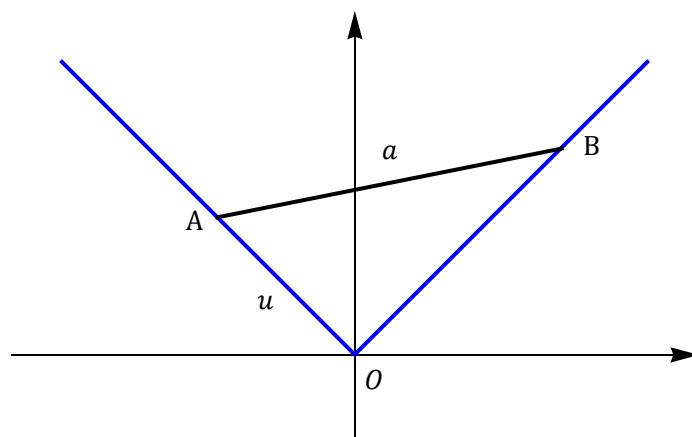
- (1) 计算参数区间 $[0, \theta]$ 的摆线长度。
- (2) 记切点 A 的曲线参数为 $\theta(t)$ ，求小球的坐标 $x(\theta), y(\theta)$ 。
- (3) 以 $\theta(t)$ 为广义坐标，写出拉氏函数。
- (4) 我们希望把拉氏函数中与广义速度有关的项化简，为此令动能为

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

其中 m 是常数。求变换后的广义坐标 $q = q(\theta)$ 。

- (5) 求 $V = V(q)$ 的表达式。
- (6) 求摆的周期。周期与振幅是否有关？

13. 折线绕对称轴以固定的角速度 ω 旋转，在 $t = 0$ 时折线的形状为 $z = |x|$ 。折线的两段分别套着两个光滑小环（质量可忽略），小环用长 a 、质量为 m 均匀光滑细杆连接。



- (1) 写出系统的拉氏函数和运动方程。
- (2) 细杆在折线上是否存在稳定位置？