

第二章 拉格朗日力学

2. 已知法夫形式

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} dx + xdy + 2xzdz$$

(1) 利用弗罗本尼斯定理检验 ω 是否可积。

(2) 是否存在函数 $f(x, y, z)$, 使得

$$df = \omega$$

成立?

(3*) 寻找合适的积分因子 $\varphi(x, y, z)$, 使得

$$\varphi(x, y, z)\omega \equiv dg(x, y, z)$$

是全微分, 并求出 $g(x, y, z) = \int \varphi(x, y, z)\omega$ 。(这一小题选做, 可不答)

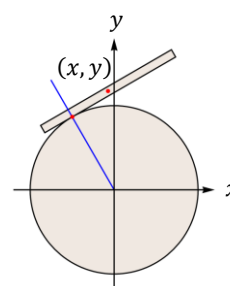
提示: ① 可以利用 $d(\varphi\omega) = 0$ 求出 φ 满足的 3 个线性偏微分方程; ② 然后令 $\varphi(x, y, z) \equiv A(x)B(y)C(z)$ 代入微分方程组, 求出分离变量解 $\varphi(x, y, z)$; ③ 指定 $\varphi(x, y, z)$ 中的积分常数, 得到一个比较简单的表达式; ④ 对 $\varphi\omega$ 积分, 求得 $g(x, y, z)$ 。

以下两题选做其一:

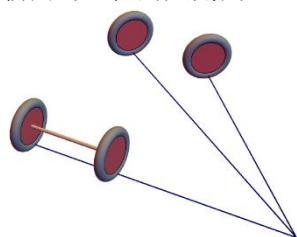
3. 如图, 一均匀薄板厚度可忽略不计, 放在一个粗糙的圆柱体上作纯滚动, 长方形的一个边与圆柱体的轴向平行。圆柱体的半径为 r , 中心位于坐标原点。薄板质心的坐标是 (x, y) , 薄板与水平方向的夹角为 θ 。

(1) 以 (x, y, θ) 为广义坐标, 写出系统满足的 2 个约束方程: 1 个代数方程 (板与柱面接触) 和 1 个微分方程 (接触点处无滑动)。

(2) 如果利用几何约束消去 θ , 选用 (x, y) 作为广义坐标, 写出 (x, y) 满足的约束方程。



4. 四轮小车作平面平行运动。设车体驾驶座相对于地面参考系的直角坐标是 (x, y) , 车头朝向与 x -轴的夹角为 θ 。



小车的一对前轮为导向轮, 后轮为从动轮; 导向轮可以相对于车身方向有偏转角, 而从动轮则不能。

(1) 阿克曼 (Ackman) 转向机构能使四个车轮在转向时均作无滑动滚动。写出约束方程。

所需的参数, 例如前后轮的轴距、一对轮子的轮间距等, 可自己引进。

(2) 如果只关心车辆的位置和朝向, 请从上一小题得到的方程, 导出广义坐标 $\{x, y, \theta\}$ 之间的约束关系。

(3) 广义坐标 $\{x, y, \theta\}$ 满足的约束方程是否完全可积?

(4*) 假设地平面无障碍物, 在 $t = 0$ 时刻小车的位姿是 $\{x_0, y_0, \theta_0\}$ 。小车能否通过运动到达任意状态 $\{x, y, \theta\}$? (这一小题是拓展思考, 可以不答)