

第一章 数学准备

11. 利用球坐标的自然基（无需归一化）

$$\vec{e}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}, \quad \vec{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \quad \vec{e}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}$$

(1) 计算度规矩阵 $g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ ，以及逆矩阵 $g^{\alpha\beta}$ 。

(2) 验证自然基的第二正交关系

$$g^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$$

(3) 计算 $\sqrt{\det g}$ ，并与积分测度对比。积分测度即体积元

$$dV = \rho(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi$$

中的权重 $\rho(r, \theta, \varphi)$ 。

12. 狭义相对论的时空又称闵可夫斯基时空，其度规矩阵为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

时空坐标 x^μ 是

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

在自然单位制下 $c = 1$ 。

(1) 两个相邻时空点的坐标差是

$$x'^\mu - x^\mu = dx^\mu$$

$$(dx^\mu) = (dt, dx, dy, dz)$$

计算时空间隔（元时 $d\tau$ ）的平方

$$(d\tau)^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ?$$

(2) 计算协变四矢量 x_μ 的分量

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = ?$$

(3) 可以证明，保持元时不变的连续变换

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

只能是非齐次线性变换

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

上式中常数 a^μ 表示时空平移的距离，矩阵 Λ^μ_ν 表示齐次洛伦兹变换。

作为特例，在齐次洛伦兹变换下，任意四矢量 x^μ 的变换为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

该变换保持模长不变，

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$$

利用上式，证明洛伦兹变换保持四矢量的内积不变，

$$a'^\mu b'_\mu = a^\mu b_\mu$$

（提示：令 $x^\mu = a^\mu + b^\mu$ ）

(4) 利用 (3) 的结论，证明

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

此题选做：

13. 半径为 1 的球面是一个 2 维黎曼空间。以纬度 θ 和经度 φ 作为流形的坐标参数，计算度

规矩阵($g_{\mu\nu}$)以及逆矩阵($g^{\mu\nu}$)。

第二章 拉格朗日力学

1. 一根右手螺旋形的钢丝沿垂直方向放置，螺距为 d ，半径为 l 。质量为 m 的珠子被穿在钢丝上，钢丝和珠子之间的摩擦系数为 μ 。在重力作用下，设摩擦力不足以阻止珠子下滑。



(1) 写出珠子满足的两个约束方程。

(2) 满足一个约束方程的点集构成一个曲面，螺旋线就是这两个曲面的交线。

分别写出这两个约束面的法向量。

(3) 约束力垂直于螺旋线，其方向只可能是两个约束面法向量的线性组合。引进待定乘子，写出珠子所受的约束力。

(4) 根据牛顿第二定律，写出珠子的运动方程。