

第一章 数学准备

6. 使用张量符号进行计算、化简:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = ?$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = ?$$

$$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = ?$$

$$\nabla \times (\psi \vec{a}) = ?$$

7. 矢量场 $\vec{B}$ 分别取成

①均匀磁场

$$\vec{B} = -\frac{1}{2}\vec{B}^{(0)}$$

②均匀梯度磁场

$$B_j = -\frac{1}{3}B_{jk}^{(1)}x_k$$

③二次多项式磁场

$$B_j = -\frac{1}{4}B_{jkl}^{(2)}x_kx_l$$

三种形式。表达式中的系数 $B_j^{(0)}, B_{jk}^{(1)}, B_{jkl}^{(2)}$ 都是常数。为了满足无源条件

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

这些系数还满足

$$B_{jj}^{(1)} = 0, \quad B_{jil}^{(2)} = 0, \quad B_{jkj}^{(2)} = 0$$

对这三种情况, 请分别计算并化简

$$\nabla \times (\vec{x} \times \vec{B})$$

根据上述结果, 三种磁场的矢量势 $\vec{A}$ 分别是什么?

8. 小船被水冲走后, 用缆绳拉回岸边。假定水流平行于河岸, 速率为 c_1 ; 拉绳的速率为 c_2 , 这两个速率均保持不变。

以水流方向为极轴, 拉绳者为原点, 建立平面极坐标系, 并在此坐标系求出小船的轨迹曲线。

以下两题是额外的练习, 不需要提交给助教, 不计入作业成绩:

9. R 是转动矩阵, 证明 $\vec{a} \times \vec{b}$ 像矢量一样转动:

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = (R\vec{a}) \times (R\vec{b})$$

10. 设

$$\phi(\vec{x}) = -\vec{x} \cdot \int_0^1 \vec{E}(\lambda\vec{x})d\lambda, \quad \vec{A}(\vec{x}) = -\int_0^1 \lambda\vec{x} \times \vec{B}(\lambda\vec{x})d\lambda$$

其中积分项中的矢量场满足

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

求 $-\nabla\phi, \nabla \times \vec{A}$ 。

提示: 利用分部积分化简。这题给出了任意电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 的标量势函数, 以及任意磁场 $\vec{B}(\vec{x})$ 的矢

量势函数。