

第一章 数学准备

以下两题选做其一：

1. 已知三维欧氏空间的标准基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 构成右手系。对坐标架作如下两步变换：（1）绕 $\mathbf{e}_3$ 旋转 45° ，（2）随后对水平面（ $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 平面）作镜面反射。

写出总的坐标变换矩阵

$$S_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$$

并计算行列式 $\det S$ 。

2. 已知并矢

$$\mathbf{R} = \cos \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)$$

和质点的位移矢量

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

求两者的内积

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}$$

3. 设方阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，分别满足特征方程

$$\begin{aligned} A\vec{x}_j &= \lambda_j \vec{x}_j, & j &= 1, 2, \dots, m \\ B\vec{y}_k &= \mu_k \vec{y}_k, & k &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

（1）找出矩阵 $A \otimes B$ 的全部特征值。

（2）找出矩阵

$$A \otimes \mathbf{1}_{n \times n} + \mathbf{1}_{m \times m} \otimes B$$

的全部特征值。

以下两题选做其一：

4. 四阶张量 P_{ijkl} 在缩并后记成

$$Q_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} P_{ijkk}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

证明在新标准基 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 下的分量

$$Q'_{ij} = R_{im} R_{jn} Q_{mn}$$

成立，即缩并的结果 Q_{ij} 是二阶张量。

5. 对称张量满足

$$S_{ij} = S_{ji}$$

证明转动之后的张量分量 S'_{ij} ，仍然是对称的：

$$S'_{ij} \equiv S'_{ji}$$

同样可证，反对称张量（ $A_{ij} = -A_{ji}$ ）在转动之后仍然是反对称张量（ $A'_{ij} \equiv -A'_{ji}$ ）。