

Theoretical Mechanics: Final Review

Chapters 5-7 Recitation

Hongfei Yu

School of Physical Science, USTC

2026 年 1 月 11 日

复习提纲

- 1 第五章：微振动理论
- 2 第六章：哈密顿力学基础
- 3 第六章：正则变换与 H-J 理论

1. 微振动与简正模式（必考）

1.1 矩阵形式

在稳定平衡点附近，系统拉氏量近似为二次型：

$$L = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbf{M} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T \mathbf{K} \eta$$

- 惯性矩阵 $\mathbf{M}$ ：通常是实对称正定矩阵.
- 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ ：通常是实对称正定矩阵.

1.2 求解步骤

1. 写出 $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ 矩阵. 2. 解特征方程 $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ 求特征频率 ω_k . 3. 求特征矢量 $\mathbf{A}^{(k)}$ 并构造模态矩阵 $\mathbf{A}$. 4. 简正坐标变换： $\eta = \mathbf{A} \zeta$.

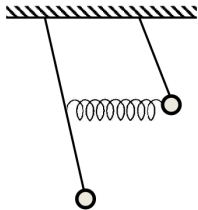
【样卷解析】微振动实例

题目（期末样卷 Q4）：用弹性势能为

$$mgl(\theta_1 - \theta_2)^2$$

的弹簧连接两个平面单摆，单摆的刚性杆长度分别为 $2l, l$ ，质点质量分别为 m, m ，与垂直方向夹角为 θ_1, θ_2 .

- ① 写出微振动的拉氏量；
- ② 求模态矩阵和自然频率.



2-3. 阻尼与受迫振动

- 阻尼振动：引入瑞利耗散函数 $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T \mathbf{D}\dot{\eta}$. 运动方程： $\mathbf{T}\ddot{\eta} + \mathbf{D}\dot{\eta} + \mathbf{V}\eta = 0$. 若 $\mathbf{D}$ 可对角化，则解为阻尼振荡 $e^{-\beta t} e^{i\omega_d t}$.
- 受迫振动：方程右端加入广义力 $\mathbf{Q}(t)$.

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = f_k(t)$$

重点考察共振条件：驱动力频率 $\gamma \approx \omega_k$.

4. Hamilton 方程 (必考)

正则方程

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

关键点:

- 广义动量定义: $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$. 注意在电磁场中 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$.
- 循环坐标: 若 H 不含 q_α , 则 p_α 守恒.
- 能量守恒: 若 H 不显含 t , 则 $H = E$ (常数) .

5-6. 劳斯变换与哈密顿光学

- 劳斯变换 (**Routhian**): 用于消除循环坐标. 对循环坐标 q_c 进行勒让德变换, 对非循环坐标保留拉格朗日形式.

$$R = \sum p_c \dot{q}_c - L$$

应用: 期末样卷 Q2 中处理 z 方向运动或球对称势中的 ϕ 方向.

- 哈密顿光学:

力学	光学
莫培督原理 $\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 0$ $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$	费马原理 $\delta \int n ds = 0$ 亥姆霍兹方程/程函方程

物理图像: 波动力学的短波极限 $\rightarrow$ 几何光学/经典力学.

7. 带电粒子的运动

哈密顿量标准形式：

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

8-10. 相空间原理、诺特定理与泊松代数

- 相空间哈密顿原理：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = 0$$

q, p 视为独立变分变量.

- 诺特定理（逆定理）：相空间中每一个守恒量 G 都是某个单参数正则变换群的生成元.

$$\dot{G} = \{G, H\} = 0 \iff G \text{ 守恒}$$

- 泊松括号： $\{F, G\} = \sum (\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q})$. 正则基本括号： $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.

11-12. 正则变换与生成函数

保辛条件：变换 $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ 的雅可比矩阵 M 满足 $M^T J M = J$.

四类生成函数：

生成函数	正则变换关系	新哈密顿量
$F_1(q, Q, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$	$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F_2(q, P, t)$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$	$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F_3(p, Q, t)$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$	$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F_4(p, P, t)$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$	$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

【样卷解析】验证变换正则性并计算生成函数

题目 (样卷 Q2): 以向下为 x -轴的正方向, 讨论落体运动.

- ① 设初始时刻的位移为 $x(t=0) = x_0$, 动量为 $p(t=0) = p_0$, 证明

$$x(t), p(t) \rightarrow x_0, p_0$$

是正则变换.

- ② 对此变换逐个判断四种常用生成函数是否存在; 若存在, 则求出各生成函数表达式和哈密顿函数 $K(t, x_0, p_0)$.
- ③ 分别求出初值 x_0, p_0 这两个守恒量所对应的 (准) 对称变换.

13. 哈密顿-雅可比 (H-J) 理论 (必考)

基本思想

寻找一个正则变换 (生成函数为 S), 使得新哈密顿量 $K \equiv 0$. 此时新坐标 $Q = \beta$ 和新动量 $P = \alpha$ 均为常数, 系统动力学被完全解出.

H-J 方程

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

其中 $S(q, \alpha, t)$ 称为哈密顿主函数 (第二类生成函数 F_2 的特例) .

分离变量法: 若 H 不显含 t , 设 $S(\mathbf{q}, \alpha, t) = W(\mathbf{q}, \alpha) - Et$. W 称为哈密顿特征函数, 满足 $H(\mathbf{q}, \nabla W) = E$.

13. 自治体系 H-J 方法

对于 H-J 方程，常考的体系是自治体系，即哈密顿量不显含时间 t ，此时解题流程固定：

- ① 写出 H-J 方程： $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$;
- ② 分离变量：设 $S = W(q, \alpha) - Et$ ，得到 $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$;
- ③ 若系统有循环坐标，则对每个循环坐标 q_c ，设 $W = p_c q_c + W'$ ，其中 p_c 为守恒动量，代入方程降阶；
- ④ 求解特征函数 W ，得到运动方程： $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$.

【样卷解析】 H-J 方程解拉格朗日陀螺

题目 (样卷 Q2): 质量为 m 的拉格朗日陀螺, 即重力场中绕定点转动的对称重陀螺, 三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$, 质心到固定点的距离为 l .

- ① 选取三个欧拉角作为广义坐标, 写出哈密顿函数 $H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$;
- ② 利用哈密顿-雅可比方程, 求哈密顿主函数 $S(t, \phi, \psi)$. (可保留积分形式, 无需求积)

例题

已知质量为 m 电荷量为 e 的带电粒子在静磁场 $\vec{B} = B\hat{e}_z$ 中的哈密顿量可以写成如下形式 (采用高斯单位制):

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2$$

在合适的规范下我们选取 $\vec{A} = (-By, 0, 0)$.

- 1 求体系的哈密顿特征函数所满足的条件, 即哈密顿主函数 $S = W + T$ 中 $W(x, y, z)$ 所满足的方程;
- 2 利用分离变量法, 求出 $W(x, y, z)$ 的具体形式;
- 3 利用哈密顿-雅可比方程求解粒子位置随时间的演化, 即 $x(t), y(t), z(t)$ 的具体形式.

复习总结

核心公式：

- 微振动： $\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0$
- 正则方程： $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla H$
- 泊松括号： $\{q, p\} = 1$
- H-J 方程： $H(q, \nabla S) + \partial_t S = 0$

解题策略：

- 遇到循环坐标 $\rightarrow$ 动量守恒 $\rightarrow$ 降阶.
- 遇到正则变换 $\rightarrow$ 优先验证辛条件或泊松括号.
- 求解复杂系统（如陀螺） $\rightarrow$ H-J 分离变量法.

祝大家期末考试取得优异成绩！