

Theoretical Mechanics: Midterm Review

Chapters 1-4 Recitation

Hongfei Yu

School of Physical Science, USTC

2025 年 11 月 27 日

复习提纲

- 1 d'Alembert 原理
- 2 Lagrange 方程（必考）
- 3 首次积分与守恒律
- 4 非完整系统
- 5 耗散系统
- 6 哈密顿原理与变分法
- 7 高阶拉格朗日系统

1. 达朗贝尔原理 (d'Alembert's Principle)

核心表述

对于具有理想约束的质点系，在任意时刻，作用在系统上的主动力与惯性力在任意虚位移上所做的虚功之和为零。

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

- 虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$: 在时间 t 冻结的情况下 ($\delta t = 0$)，符合约束条件的微小位移。
- 理想约束：约束力不做功 ($\sum \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$)，例如光滑表面、不可伸长的轻绳、刚性杆等。
- 静力学特例：当 $\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$ 时，退化为虚功原理 $\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ 。

典型应用：虚功原理求平衡位置

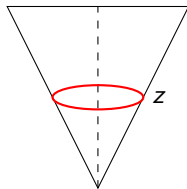
例题回顾（期中样卷，作业 06-9 题）：弹性圆环套在光滑圆锥上，求平衡高度。

解题思路：

- ① 选取广义坐标（如高度 z ）。
- ② 写出系统的总势能 $V = V_{\text{重力}} + V_{\text{弹性}}$ 。
- ③ 利用虚功原理（保守系统即势能极值条件）：

$$\delta W = -\delta V = -\frac{dV}{dz}\delta z = 0$$

- ④ 解出 $\frac{dV}{dz} = 0$ 对应的 z 。



2. 拉格朗日方程 (Lagrange Equations)

标准形式 (完整、保守系统)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \mathcal{L} = T - V$$

解题 “四步走”:

- ① 定坐标: 选择独立、合适的广义坐标 $q_1, \dots, q_k$ (自由度分析)。
- ② 写动能: $T = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$, 注意在曲线坐标系 (极坐标、球坐标) 下的速度形式。
- ③ 写势能: $V = V(q_1, \dots, q_k)$ 。
- ④ 求导数: 准确计算偏导数 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ 和 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ 。

注: 若存在非保守力 (如阻力), 方程右边为广义力 Q_α 。

难点突破：含时约束与速度势

- **广义势 (Generalized Potential)**: 若广义力 Q_α 可由 $U(q, \dot{q}, t)$ 导出:

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

则拉氏量修正为 $\mathcal{L} = T - V - U$ 。

经典例子：电磁场中的带电粒子， $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (参考作业 17-19 题)。

- **Ritz 变分法 (作业 15-15 题)**: 当无法精确求解时，假设 $q(t) \approx \sum a_n t^n$ ，将泛函 $S[q]$ 转化为函数 $S(a_0, a_1, \dots)$ 的极值问题。

3. 首次积分 (First Integrals)

循环坐标 $\rightarrow$ 广义动量守恒

若 $\mathcal{L}$ 中不显含 q_α (即 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$)，则称 q_α 为循环坐标。

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{常数}$$

时间平移对称性 $\rightarrow$ 广义能量守恒

若 $\mathcal{L}$ 中不显含时间 t (即 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$)，则雅可比积分 (广义能量) 守恒：

$$h = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \mathcal{L} = \text{常数}$$

注意： h 等于机械能 $E = T + V$ 的条件是：1. 势能 V 与速度无关；2. 坐标变换关系 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$ 不显含时间 (定常约束)。

诺特定理 (Noether's Theorem)

核心思想：每一个连续的对称性都对应一个守恒量。

- 空间平移 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon} \implies$ 动量守恒
- 空间转动 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} \implies$ 角动量守恒 (参考作业 17 题鱼眼透镜)
- 时间平移 $t \rightarrow t + \epsilon \implies$ 能量守恒
- 尺度变换 (如 Lane-Emden 方程, 作业 17-1 题) $\implies$ 维里定理相关守恒量

公式记忆: $I = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \xi_\alpha - \mathcal{L} \tau_0$ (简略形式)

4. 非完整系统 (Non-holonomic Systems)

定义

约束方程中含有广义速度，且不可积（不能化为坐标的几何约束）。形式通常为线性微分形式：

$$\sum_{\alpha} a_{\beta\alpha} \dot{q}_{\alpha} + a_{\beta 0} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, m)$$

典型例子：纯滚动（车轮不打滑）、冰刀滑行（速度沿冰刀方向）。

拉格朗日乘子法

引入乘子 λ_{β} ，方程变为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} a_{\beta\alpha}$$

易错点：绝对不能先将非完整约束代入 $\mathcal{L}$ 再求导，必须在方程中引入约束力。

5. 耗散系统 (Dissipative Systems)

瑞利耗散函数 (Rayleigh Dissipation Function)

对于与速度成正比的粘滞阻力 $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$, 定义耗散函数:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

广义耗散力为 $Q_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 。

修正的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

能量耗散率: $\frac{dh}{dt} = -2\mathcal{F}$ (能量随时间单调递减)。

6. 哈密顿原理 (Hamilton's Principle)

最小作用量原理

真实运动的路径使作用量泛函 S 取驻值 (通常是极小值):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

(需满足固定端点条件 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$)

- **莫培督原理 (Maupertuis Principle):** 对于保守系统 (能量 E 守恒), 真实路径使约化作用量取驻值:

$$\delta W = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \delta \int \sqrt{2m(E - V)} ds = 0 \quad (\text{雅可比形式})$$

- 应用: 几何光学与力学的类比 (费马原理 vs 莫培督原理)。
- 考题映射: 作业 17-4 题 (费马原理求光线轨迹)、作业 15-19 题 (抛物运动的变分)。

7. 高阶拉格朗日系统 (Higher-Order Systems)

若拉氏量依赖于高阶导数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots)$:

广义欧拉-拉格朗日方程

通过分部积分法推导 (注意处理边界项 $\delta\dot{q}$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) - \dots = 0$$

物理背景:

- 通常出现在弹性力学 (梁的弯曲, 势能依赖曲率 $\propto y''^2$)。
- 修正引力理论或某些场论模型。

备考建议

- ① 坐标系选择是关键：球坐标、柱坐标、椭圆坐标（两心问题）下的 T 和 V 要熟练写出。
- ② 约束分析：
 - 完整 vs 非完整（是否含速度且不可积？）
 - 定常 vs 非定常（是否显含时间 t ？）
- ③ 计算基本功：偏导数不要算错，尤其是复合函数求导。
- ④ 物理图像：遇到复杂的数学题（如变分法），先想一下物理直觉（如光程最短、能量最低）。
- ⑤ 复习作业：重点关注作业中的“Ritz 变分”、“中心势”、“非完整约束冰橇”等题目。

祝大家期中考试顺利！