



生成函数中的时间项

很多同学问我，样卷中第三题参考答案中的生成函数：

$$F = \dots - \frac{3}{8}mg^2t^3,$$

为什么后面会有一个 $-\frac{3}{8}mg^2t^3$ 项. 一个直接的结论是：从数学上来说，生成函数可以加上任意一个与时间 t 有关的单变量函数 $f(t)$.

实际上，对于改变后的生成函数 $F' = F + \Delta F(t)$ ，新旧哈密顿量之间满足：

$$K' = H + \frac{\partial F'}{\partial t} = H + \frac{\partial F}{\partial t} + \Delta F'(t).$$

而对于任意哈密顿量 H ，我们构造 $H' = H + f(t)$ ，结果不改变运动方程（正则方程）：

$$\dot{p} = -\frac{\partial H'}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H'}{\partial p}.$$

因此 $K' = H + \frac{\partial F}{\partial t} + f'(t)$ 与 $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ 在运动学上是等价的.

最后我们可以多考虑一点，若认为哈密顿量是能量，则自然界孤立系统中不应该存在单独的 $f(t)$ ，因为这意味着系统的能量可以在系统自身相空间状态不改变的情况下发生改变. 当然这里澄清一下，正则变换后的 K 与能量无关，例如 **H-J** 理论中我们通常认为 $K = 0$.

如果考虑拉格朗日力学的话，我们知道，拉格朗日量中的全导数项是“非物理”的 $L' = L + \frac{df}{dt}$.

这里只考虑 f 作为时间的单变量函数 $f(t)$ ，对 L' 做 Legendre 变换：

$$H' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L - \frac{df}{dt} = H - \frac{df}{dt}.$$

这里的 $-\frac{df}{dt}$ 与上面哈密顿力学提到的 $f(t)$ 实际上是同一个东西，属于规范自由度.